

TD - Calcul algébrique

1 Compétences à acquérir

- ☐ Savoir manipuler les indices d'une somme
- ☐ Savoir reconnaître les sommes classiques, ou s'y ramener par des changements d'indice
- ☐ Savoir résoudre un système linéaire via la méthode du pivot de Gauss. Notion de paramètre libre.
- ☐ Savoir factoriser un polynôme à l'aide de différentes techniques (racines évidentes...). Savoir exprimer un polynôme sous forme de polynômes irréductibles.
- ☐ Savoir effectuer une division euclidienne de polynôme.
- ☐ Savoir raisonner sur le degré d'un polynôme.
- ☐ Connaître le lien entre la multiplicité d'une racine et le polynôme dérivé.
- ☐ Savoir décomposer une fraction polynomiale en éléments simples.

2 Calculs élémentaires

Exercice 1. Sans calculer le discriminant, résoudre :
 $x^2 - 5x + 6 = 0$, $1 - x^2 = 0$, $4 - x^2 > 0$,
 $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Exercice 2. Factoriser les expressions suivantes.

1. $x^2 - 2x + 1$
2. $x^2 + x - 2$
3. $3x^2 - 2x - 5$
4. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$

Exercice 3. Discuter et résoudre selon m les équations et inéquations suivantes :

1. $mx^2 + (2m - 1)x - 2 = 0$
2. $(m^2 - 1)x < m + 1$

3 Utilisations et manipulations des sommes

Exercice 4. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole sigma :

- $A = \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(2025)$
- $B = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots - u^{2025}$
- $C = 8 + 12 + 16 + \dots + 88$

- $D = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots$ jusqu'à la puissance 29.

Exercice 5. Compléter les sommes pour que les égalités proposées soient vraies.

$$\bullet \sum_{k=5}^{n+1} a_{k+2} = \sum_{k=7}^{n+1} a_k$$

$$\bullet \sum_{k=29}^{n-3} a_k = \sum_{k=1}^{n-34} a_k$$

$$\bullet \sum_{k=4}^{n+3} a_k = \sum_{k=7}^n a_k$$

Exercice 6. Calculer : $S = \sum_{k=1}^n 2n$, $T = \sum_{k=1}^n 2^k$, $U =$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \pi k, \quad V = \sum_{k=3}^n k$$

Exercice 7. Discuter (c'est-à-dire analyser les différents cas de figure, et non discuter de vos prochaines vacances avec vos ami.e.s, même si cela peut être très intéressant également), suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, du résultat des sommes suivantes : $A_n = \sum_{k=0}^n i^k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n (-i)^k$.

Exercice 8 (Donnez-moi ce télescope, que je puisse y voir clair.). Calculer la somme suivante.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

Exercice 9 (Un petit calcul et on s'en va.). Soit $S = \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)$. Déterminer cette somme.

Exercice 10. Soit $S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k-1}}{3^k}$. Exprimer cette somme et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 11 (*). On considère $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$ pour $n \geq 1$.

1. Rappeler l'expression de $1 + 2 + \dots + k$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
3. Donner une expression simple, après télescopage, de S_n .
4. Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
5. Se servir des questions précédentes pour déterminer $T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k}$.

Exercice 12. En observant que $k = (k+1) - 1$, calculer $\sum_{k=1}^n k.k!$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 13. Simplifier $\sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{j}{j+1} \right)$.

Exercice 14 (*).

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \cos(3x) = (2 \cos(2x) - 1) \cos(x)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \ln(2 \cos(\frac{\theta}{3^k}) - 1)$, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$.

(a) Justifier l'existence de $S_n(\theta)$.

(b) Montrer que $S_n(\theta) = \ln(\cos(\frac{\theta}{2})) - \ln(\cos(\frac{\theta}{2 \cdot 3^n}))$ (on pourra penser à un télescopage).

(c) En déduire la convergence de la suite (S_n) .

Exercice 15. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^6 = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n).$$

Exercice 16. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$

Exercice 17 (*).

1. Montrer que pour p et n entiers naturels non nuls tels que $1 \leq p \leq n$, on a

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

2. Exprimer en fonction de n :

- (a) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$
- (b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k \binom{n}{k}$
- (c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 18 (*). Démontrer que

$\sum_{k=0}^n k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$. On pourra remarquer que $\sum_{k=0}^n k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^k 2^k$

Exercice 19 ()**. Le but de cet exercice est de trouver une formule générale pour calculer la somme des entiers à une certaine puissance, connaissant la somme des entiers à une puissance inférieure.

Pour $p \geq 1$, on note $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$.

1. Montrer que

$$S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

2. En déduire que

$$(S_{p+1}(n+1))^{p+1} = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

3. Déduire l'expression des sommes $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$.

Exercice 20. Calculer $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$.

Exercice 21.

1. Écrire un programme calculant la double somme $S_{n,p} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (i+j)$ de manière naïve.
2. Déterminer mathématiquement le résultat de cette somme.
3. Quelle méthode permet d'obtenir le résultat le plus rapidement possible? Comment quantifier le temps de calcul nécessaire pour chacune des deux méthodes?

Exercice 22 (*)**. En utilisant des formules de somme, résoudre la partie 1 du problème proposé à cette adresse : <https://adventofcode.com/2021/day/17>

4 Produits

Exercice 23. Calculer : $\prod_{k=1}^n k$, $\prod_{k=1}^{n-1} 2^k$, $\prod_{k=1}^n k^2$, $\prod_{k=0}^n k^2$.

Exercice 24. Calculer : $\prod_{k=22}^{29} \frac{k}{k-1}$, $\prod_{k=22}^{29} \frac{k}{1-k}$.

Exercice 25. Calculer en fonction de n : $\prod_{k=1}^n n$, $\prod_{k=1}^n (n+1-k)$, $\prod_{k=3}^n (1 - \frac{1}{k})$.

5 Systèmes linéaires

Exercice 26. Résoudre les systèmes d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$, et indiquer à chaque fois quelle est la nature des espaces géométriques décrits par ces systèmes.

1. $x + y = 0$
2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Exercice 27. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, et indiquer à chaque fois quelle est la nature des espaces géométriques décrits par ces systèmes.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $x + 2y - 3z = 0$
3. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 4x + 3y - z = 7 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

$$7. \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 2 \\ x + y + z - t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 3 \end{cases}$$

6 Polynômes

6.1 Degré

Exercice 28. Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$ et $P(2) = 4$, et tracer sa représentation graphique.

Exercice 29. Soit $P(X) = 3X^3 - 2$, $Q(X) = X^2 + X - 1$ et $R(X) = aX + b$. Trouver a et b afin que le degré de $P - QR$ soit le plus petit possible.

Exercice 30. Résoudre les équations suivantes.

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2. $P^2 = 4P$
3. $P \circ P = P$

6.2 Ça commence par un p'ti Bézout de rien du tout...

Exercice 31.

Effectuer la division euclidienne de P par B .

1. $P(X) = 2X^2 + 7X - 20$, $B(X) = X + 2$.
2. $P(X) = 2X^4 - X^3 + 3X - 1$, $B(X) = X^2 - X + 1$.
3. $P(X) = X^4 - X^3 + X - 2$, $B(X) = X^2 - 2X + 4$
4. $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$, $B(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$.

Exercice 32. A quelle condition sur a , b et $c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 33. Sans effectuer de division euclidienne, calculer les pgcd suivants.

1. $\text{pgcd}(X^2 + X - 2, X - 1)$
2. $\text{pgcd}(X^2 + X - 2, X + 2)$
3. $\text{pgcd}(X^2 + X - 2, 8)$
4. $\text{pgcd}(X^3 + X^2 - X - 1, (X - 1)(X - 3))$

Exercice 34. Calculer les pgcd suivants.

1. $A(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $B(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
2. $A(X) = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B(X) = X^3 + X + 1$
3. $A(X) = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $B(X) = X^n - nX + n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 35. Calculer $D = \text{pgcd}(A, B)$, puis trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

1. $A(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
2. $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$

Exercice 36. Exprimer le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par :

1. $X^2 - 3X + 2$
2. $X^2 + X + 1$
3. $X^2 - 2X + 1$

6.3 Racines

Exercice 37. Soit P un polynôme à coefficients réels. Démontrer que si z est une racine de P , alors $\bar{z}$ est également racine.

Exercice 38 (*). Prouver que $X^{n+1} \cos((n - 1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1$ est divisible par $X^2 - 2X \cos \theta + 1$.

Exercice 39. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer l'équivalence suivante :

$(\alpha \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } k) \Leftrightarrow (P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) \text{ et } P^{(k)}(\alpha) \neq 0).$

Exercice 40. Soit $P(X) = X^n - 1$. Démontrer que P admet n racines distinctes. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde. A défaut, un raisonnement absurde fera l'affaire.

Exercice 41 (*). Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 42. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soient $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$.

1. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 43. Soit $P(X) = nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est la multiplicité de 2 ?

Exercice 44. Soit n un entier naturel, a et b des réels et $P(X) = \sum_{k=0}^n X^{k+2} + aX + b$. A quelle(s) condition(s) P admet-il 1 comme racine double ?

Exercice 45. Déterminer les racines de $P(X) = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.

6.4 Fractions rationnelles

Exercice 46. Décomposer les polynômes suivants en produits d'irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

1. $X^4 + 1$
2. $X^8 - 1$
3. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$
4. $X^{12} - 1$
5. $X^2 + (3i - 1)X - 2 - i$

Exercice 47. Soit $F(X) = \frac{2X^2+7X-20}{X+2}$. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $\pm\infty$. Etudier la position du graphe de F par rapport à cette droite.

Exercice 48. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

1. $\frac{X^5+X^4-1}{X^3-X}$
2. $\frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$
3. $\frac{X^5-2X^3+4X^2-8X+11}{X^3-3X+2}$
4. $\frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)}$

Exercice 49. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

1. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$
2. $\frac{X+i}{X^2+i}$
3. $\frac{2X}{(X+i)^2}$

Exercice 50. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$:

1. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$
2. $\frac{X^2+1}{X^4+1}$
3. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$